Gelöste und ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie

Peter M. Gruber

Im folgenden Vortrag werden nach einleitenden Bemerkungen über die Stellung der Geometrie im Mathematikunterricht mehrere gelöste und ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie erläutert.

1. Die Geometrie im Mathematikunterricht

Seit der Zeit, ab der ich das Schulgeschehen bewußt erlebt habe, also etwa seit 1950, hat sich die Stellung der Geometrie im Rahmen des Schulunterrichts wesentlich verändert. In den 50er und 60er Jahren nahm die Geometrie einen verhältnismäßig großen, kaum in Frage gestellten Raum ein. Es wurde die klassische Geometrie im euklidischen Raum behandelt, insbesondere Dreiecksaufgaben, Trigonometrie einschließlich sphärischer Trigonometrie und Körperberechnungen verschiedener Art. Dazu kam die analytische Geometrie. Die umfangreiche Diskussion über die "neue Mathematik" Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre führte zu einer spürbaren Formalisierung des geometrischen Schulstoffes, der in ein algebraisches Prokrustesbett gezwungen wurde, aber auch zu einer Verringerung seines Umfanges. In den letzten Jahren glaube ich eine Gegenbewegung zu sehen.

Es verdient Erwähnung, daß im österreichischen Schulwesen Änderungen der Lehrinhalte wegen der Lehrfreiheit zum Vorteil der Schule, der Schüler und letztlich unseres Landes viel sanfter verlaufen als anderswo. Unsere Schulmathematiker haben - gestatten Sie mir den Ausdruck - eine gesunde Portion Hausverstand, der sie skeptisch gemacht hat gegen Eiferer, die den Unterricht nach abstrakten,am grünen Tisch ausgedachten Prinzipien umgestalten wollen.

Die Entwicklung des Mathematikunterrichts spiegelt - mit Phasenverzögerung - die Entwicklung im wissenschaftlichen Bereich wider. Vielleicht darf man die Mathematik des 19.Jahrhunderts mit ihrer Betonung der anschaulichen Geometrie und Analysis mit der Situation in der Schule bis in die 60er Jahre vergleichen. Zu Ende des 19. und im 20.Jahrhundert gewinnt die von Moritz Pasch (1843-1930) und durch David Hilberts (1862-1943) Grundlagen der Geometrie eingeleitete Axiomatisierung weiter Teile der Mathematik an Boden. Die Axiomatik stellt zweifellos eine wichtige Facette der Mathematik dar - der zweitausend Jahre währende Einfluß der Axiome Euklids (3 Jhdt.v.Chr.) bestätigt das eindrucksvoll-,aber eben nur eine Facette und nicht die gesamte Mathematik. Die axiomatisch-formalistische Tendenz und der Zug zur Abstraktion finden ihren deutlichstens Ausdruck im Werk Bourbakis, das in den 60er und 70er Jahren einen ungeheuren Einfluß ausübte. Es handelt sich dabei um eine lehrbuchartige Darstellung der Mathematik auf hohem, sehr abstraktem Niveau, die von einer Gruppe junger, bedeutender französischer Mathematiker vor dem 2.Weltkrieg begonnen wurde. Diese Entwicklung führte zur "neuen Mathematik" in der Schule, zur Mengenlehre und zu Aussagen wie "Euklid (d.h. die Geometrie) ist tot". Sie hat den Unterricht und noch mehr die Diskussion über den Unterricht nachhaltig beeinflußt.

Der Bourbakismus hat jedoch im letzten Jahrzehnt deutlich an Glanz verloren. Fast unbemerkt, dafür aber umso kräftiger sind Gebiete gewachsen oder wiedererstarkt, die nicht in das Bourbaki-Schema passen, wie die speziellen Funktionen, die angewandte Mathematik , das große Gebiet der Differentialgleichungen, die Optimierung und viele andere. Das führte zu einer Rückbesinnung auf die Analysis und die Geometrie gewinnt deutlich an Reiz. Neue geometrische Gebiete, wie die Katastrophentheorie und das Gebiet der Fraktale entstanden und Verbindungen zur Kunst werden zunehmends gepflegt. Besonderes Interesse hat in den letzten Jahren die Computergeometrie auf sich gezogen. Der Computer erweist sich als hervorragendes Hilfsmittel für verschiedenartige geometrische Probleme, angefangen von der Differentialgeometrie bis hin zur Herstellung von Werkzeichnungen komplizierter Bauteile.

Die Tatsache, daß für die Geometrie im Unterricht eine Phase der Kräftigung begonnen hat, schlägt sich auch in der Wahl meines Vortragsthemas nieder. Im folgenden werden geometrische Fragestellungen vorgeführt, die man mit gewissem Recht auch zur Unterhaltungsmathematik, allerdings mit tiefliegendem Hintergrund, zählen kann. Es würde mich freuen, wenn das eine oder andere der angeschnittenen Themen ihr Interesse fände und sie es in persönlichen Gesprächen im Konferenzzimmer, mit Schülern und Bekannten für erwähnenswert hielten.

2. Variationen zum isoperimetrischen Problem

Eines der ältesten Problem der Mathematik ist das isoperimetrische Problem. In seinem einfachsten Fall kann man es so aussprechen: Man betrachtet alle ebenen Flächenstücke, die von einer einfach geschlossenenen Kurve fester Länge berandet werden. Dann sind diejenigen Flächenstücke zu bestimmen, die den größten Inhalt haben. Beim räumlichen Problem sucht man unter allen Körpern, die von einer geschlossenen Fläche mit festem Flächeninhalt berandet werden, diejenigen mit größtem Volumen.

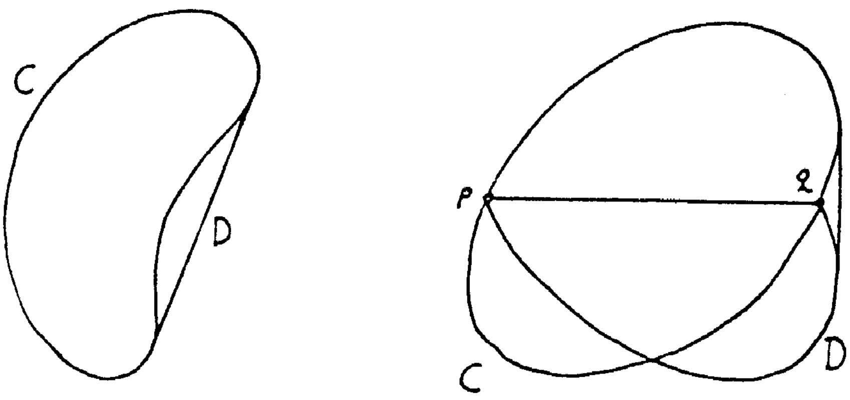
Man liest häufig, daß die Geschichte des isoperimetrischen Problems mit der Königin Dido von Karthago beginnt. Die phönizische Fürstin Dido floh per Schiff aus Tyrus (dem heutigen Sur im Libanon), wo ihr Bruder, König Pygmalion, ihren Gatten ermordete, um ihren Besitz an sich zu bringen. Mit ihrer Gefolgschaft landete sie um 900 v.Chr. in Afrika an der Stelle wo später Karthago stand. Sie versuchte vom dortigen König Jarbas von Numidien Land zu kaufen. Wohl um sie wieder los zu werden, verkaufte er ihr wie bekannt nur soviel Land, wie eine Rinderhaut umspannt. Die schlaue Dido interpretierte die Vereinbarung zu ihrem Vorteil aber so, daß sie die Haut in schmale Streifen schnitt, die Streifen zusammenknüpfte und damit ein möglichsts großes Gebiet einfaßte. Die Lösung ist ein Kreis oder, wenn man die Küste berücksichtigt und gerade voraussetzt, ein Halbkreis. Mit ihrer Klugheit wird Dido wohl die richtige Lösung gefunden haben. Sie gründete auf diesem Landstück die Burg Byrsa, das spätere Karthago. Ihr weiteres Schicksal ist tragisch - sie endet durch Selbstmord. Nach Vergil, weil sie von Aeneas, der auf seiner Flucht aus dem besiegten Troja auch nach Karthago kam, wieder verlassen wurde, nach historischen Berichten, um sich dem König Jarbas zu entziehen, der um ihre Hand anhielt, um die aufblühende Stadt unter seinen Einfluß zu bringen.

Dido war aber nicht die erste, welche das isoperimetrische Problem in der Praxis löste. Grob vereinfacht gesagt, stehen die Eskimos schon von jeher vor dem Problem, mit einer festen Menge von Schneequadern eine möglichst große Unterkunft herzustellen. Sie wissen aus der Praxis, daß die Lösung ein halbkugelförmiges Iglu ist. (Nebenbei sei angemerkt, daß die Eskimos im Grunde ein wesentlich komplizierteres Problem aus der Theorie der Wärmeleitung lösen, das zu Klasse der isoperimetrischen Ungleichungen der mathematischen Physik gehört.)

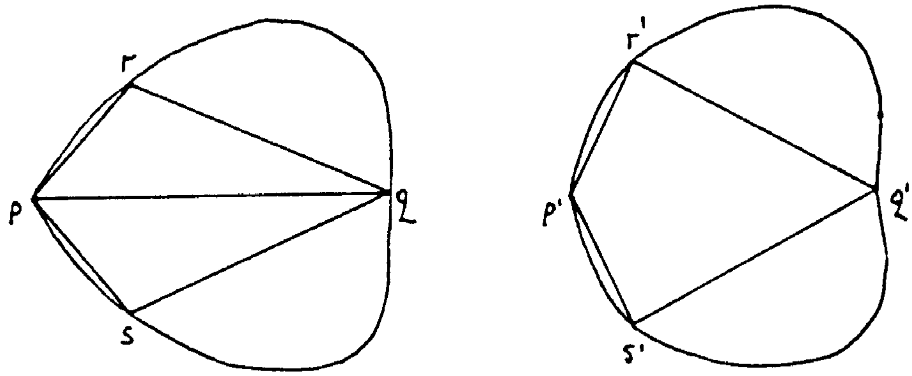
Im Altertum beschäftigten sich auch Pythagoras (580-500), Aristoteles (384-322) und Archimedes (287-212) mit dem isoperimetrischen Problem. Am erfolgreichsten unter allen Alten war aber Zenodorus (zw.250 v.Chr. und 75 n.Chr.).

Die aufkommende Analysis, vor allem die Variationsrechnung, hat viel dazu beigetragen, daß man sich im 17. und 18.Jahrhundert erneut mit dem Problem befaßte. Hier sind Jacob (1654-1705) und Johann (1667-1748) Bernoulli zu nennen, ebenso Leonhard Euler (1707-1783), Thomas Simpson (1710-1761) und Louis J.Lagrange (1736-1813).

Die etwa gleichzeitig entstandenen geometrischen Beweise gehen nicht wesentlich über Zenodorus hinaus, der sich nur mit Polygonen und Kreisen befaßte. Neue geometrische Ideen bringt erst der berühmte Schweizer und Wahl-Berliner Jakob Steiner (1796-1863) in den Problemkreis ein. Wir beschreiben sein "Viergelenksverfahren". Es sei C ein ebenes Flächenstück das von einer einfach geschlossenen Kurve fester Länge berandet werde. Nun zeigt man: Ist C kein Kreis, dann gibt es ein Flächenstück D von höchstens gleichem Umfang aber mit größerem Inhalt. Damit ist, so glaubte Steiner, der Nachweis erbracht, daß unter allen umfanggleichen Flächenstücken der Kreis den größten Inhalt hat. Wäre C nicht konvex (enthält C also "einspringende" Randstücke), dann nimmt man für D die kleinste konvexe Menge, die C enthält, also seine konvexe Hülle. Es seien nun p,q zwei Randpunkte von C, die den Umfang halbieren. Wäre C nicht symmetrisch bezüglich der Strecke pq so kann man jedenfalls einen bezüglich pq symmetrischen konvexen Bereich D finden mit Umfang höchstens gleich dem von C und Inhalt mindestens gleich dem von C.



Wäre C kein Kreis, dann gibt es einen Punkt r auf dem Rand von C, sodaß das Dreieck pqr bei r keinen rechten Winkel hat. Es sei s der zu r symmetrische Punkt. Wir verbinden die Strecken pr, rq, qs, sp mit Gelenken und fixieren auf jeder Strecke das entsprechende "Möndchen". Nun verformt man das Gelenksviereck prqs, sodaß bei r, s rechte Winkel entstehen. Damit vergrößert sich sein Inhalt und man erhält ein Flächenstück von gleichem Umfang aber größerem Inhalt.



Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) scheint der erste gewesen zu sein, dem auffiel, daß alle diese "Beweise" der Extremaleigenschaft von Kreis und Kugel auf der Annahme beruhen, daß das Problem überhaupt eine Lösung besitzt. Diese Annahme wurde aber von niemandem bewiesen. Steiner hat zunächst die Dirichletsche Kritik schroff zurückgewiesen. Später sind ihm anscheinend Bedenken gekommen. Das folgende Beispiel, das Oskar Perron (1880-1975) gerne erwähnt hat, zeigt deutlich, wie berechtigt die Dirichletsche Kritik war: Wir "zeigen", 1 ist die größte natürliche Zahl. Das kann man so "einsehen": Es sei n eine natürliche Zahl. Aus $n > 1$

folgt $n^2 > n$. Wir haben also eine größere gefunden. Eine Zahl $n > 1$ kann also nicht die größte Zahl sein. So bleibt also nur mehr die Möglichkeit übrig, daß 1 die größte Zahl ist. Nach der Kritik von Dirichlet bemühte man sich verzweifelt, den fehlenden Existenzbeweis nachzutragen. Die Erfolglosigkeit führte allmählich zur Überzeugung, daß das isoperimetrische Problem überhaupt unlösbar wäre. Es wirkte daher wie ein Paukenschlag als Karl Weierstraß (1815-1897) in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts mit Methoden, welche er in die Variationsrechnung einführte, den ersten vollständigen Beweis für den ebenen und den räumlichen Fall erbrachte. Er führte den Beweis in seinen Vorlesungen vor; veröffentlicht wurde er erst 1927.

Hermann Brunn (1862-1939) hat in seiner Dissertation einen Satz bewiesen, die berühmte Brunn-Minkowskische Ungleichung, und dabei geäußert: "Zum Beweis der Minimaleigenschaft der Kugel läßt sich der Satz nicht verwenden." Hermann Minkowski (1864-1909) hat gesehen, daß eben dieser Satz ein geradezu maßgeschneidertes Hilfsmittel für einen ganz kurzen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung darstellt. Diese Ungleichung drückt die Minimaleigenschaft von Kreis und Kugel formelmäßig aus:

$$\frac{F(C)}{P(C)^2} \leq \frac{F(K)}{P(K)^2}$$ Für jedes Flächenstück C mit Inhalt F(C) und Umfang P(C). K ist der Einheitskreis.

$$\frac{V(C)^2}{O(C)^3} \leq \frac{V(K)^2}{O(C)^3}$$ Für jeden Körper C mit Volumen V(C) und Oberfläche O(C). K ist die Einheitskugel.

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn C ein Kreis bzw. eine Kugel ist. Das Bestehen dieser Ungleichung und die Feststellung, wann Gleichheit eintritt, sind offenbar mit der Aussage äquivalent, daß genau die Kreise (Kugeln) maximalen Inhalt (Volumen) bei vorgelegtem Umfang (Oberfläche) haben, also die Lösung des isoperimetrischen Problems darstellen.

Während mit dem Beweis der isoperimetrischen Ungleichung gleich die Existenzfrage mit erledigt wird, kann man die Existenz von Lösungen des isoperimetrischen Problems direkt leicht mit dem Auswahlsatz des großen, in Hamburg wirkenden Grazer Geometers Wilhelm Blaschke (1885-1962) sicherstellen.

Heute kennt man zahllose Verallgemeinerungen und Verfeinerungen des isoperimetrischen Problems. Wichtig scheint mir, daß sich beim isoperimetrischen Problem so verschiedenartige Gebiete berühren wie geometrischen Maßtheorie, Differentialgeometrie, Differentialgleichungen, aber auch algebraische Topologie und neuerdings algebraische Geometrie. Die klassischen geometrischen Methoden, die zur Behandlung des isoperimetrischen Problems entwickelt wurden, erwiesen sich überraschenderweise nützlich für die mathematische Physik.

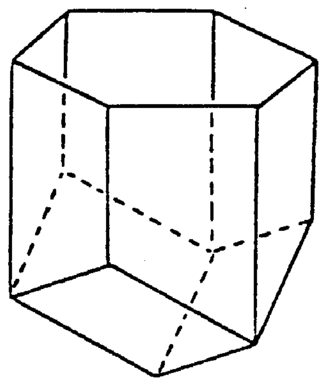
Will man in einem festen ebenen Bereich n Punkte durch Grenzen voneinander trennen, sodaß die Bereiche im Schnitt möglichst kreisförmig sind, dann ist für $n \to \infty$ die beste Anordnung diejenige, bei der die Punkte in einem Sechseckmuster angeordnet sind. Ebenso wie dieses Problem führen zahlreiche weitere Fragen z.B. der numerischen Integration oder der Kristallphysik, auf Sechseckmuster. Damit haben wir eine Überleitung zu der Frage

3. Was Bienen wissen, und was sie nicht wissen

Den folgenden Betrachtungen möchte ich ein Wort aus den Philosophiae Naturalis Principia Mathematica von Isaak Newton (1643-1727) - of einfach Principia genannt - voranstellen: "Die Natur macht nichts überflüssiges, und mehr ist überflüssig, wenn weniger den gleichen Zweck erfüllt."

Viele Phänomene der Natur glaubt man dann zu "verstehen" oder "erklären" zu können, wenn man die Naturerscheinungen als Lösung eines Extremalproblems deuten kann. Beispiele sind die Gesetze für die Reflexion und die Brechung von Lichtstrahlen. Sie folgen aus dem Prinzip von Pierre Fermat (1601-1665), das besagt, daß die Wege von Lichtstrahlen zeitextremal sind. Eine Gleichgewichtslage in einem mechanischen System bedeutet ein Minimum der potentiellen Energie. So hat etwa ein Flüssigkeitstropfen im freien Fall - unter Vernachlässigung der Luftreibung - kugelförmige Gestalt, denn die Kugelform minimiert die Oberflächenenergie. Viele weitere Aussagen der Mechanik folgen aus dem Prinzip des Iren William Rowan Hamilton (1805-1865). Die meisten Anwesenden haben wohl schon die Schönheit des regelmäßigen Baues von Kristallen bewundert. Auch sie läßt sich durch ein Minimalprinzip, das Gesetz von Wulff - sagen wir es vorsichtiger - deuten. Wir kommen darauf noch zurück. Wer von uns hat sich nicht schon über die regelmäßige Anordnung der Zellen in einer Bienenwabe gewundert. Damit sind wir beim nächsten Thema.

Eine Bienenwabe ist - mathematisch idealisiert - ein System von translationsgleichen oder durch Spiegelung auseinander hervorgehenden konvexen Polyedern, den (Waben-)Zellen, die den Raum zwischen zwei parallelen Ebenen ohne Überlappung so ausfüllen, daß jede Zelle eine Seitenfläche - besser: eine Öffnung - auf genau einer der beiden Ebenen besitzt. Die Zellen, welche die Bienen anfertigen, haben vorne (d.h. an den Ebenen) eine Öffnung von der Form eines regulären Sechsecks, das die Basis für ein sechseitiges Prisma darstellt. Das Prisma ist hinten abgeschlossen durch drei Rhomben, die jeweils einen Flächenwinkel von 120° einschließen.



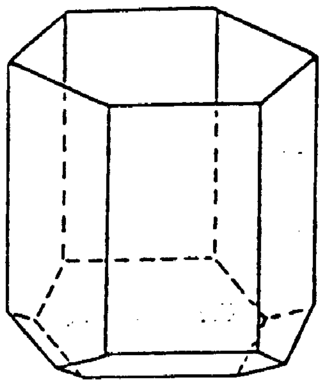
Warum bauen Bienen so seltsame Gebilde? Nach einer weit verbreiteten Vermutung, die schon bei Pappus (ca. 320 n.Chr.) auftritt, ist der Grund ein ökonomischer: Die Bienen versuchen ihre Zellen bei vorgelegtem Zellvolumen und Abstand der Randebenen mit möglichst geringem Materialaufwand zu bauen.

Der berühmte ungarische Geometer Lâszlo Fejes Tôth hat sich in einer Arbeit mit dem Titel "What bees know and what they do not know" mit dieser Frage auseinandergesetzt. Ich möchte seine Ergebnisse anführen. Dazu eine Präzisierung:

Erstes isoperimetrisches Problem für Bienenwaben:

Unter allen Wabenzellen von vorgelegtem Volumen, die eine Wabe vorgelegter Dicke erzeugen, gebe man die mit kleinster Oberfläche an. Obwohl man weiß, daß die Lösung existiert, kennt man sie nicht. Wenn man aber verlangt, daß der hintere Abschluß aus drei Rhomben besteht, dann ist die von den Bienen gewählte Form optimal. Damit haben die Bienen schon vor vielen Millionen von Jahren ein von René A.F. de Rêaumur (1683-1757) aufgeworfenes Problem richtig gelöst.

Zweites isoperimetrisches Problem für Bienenwaben:
Unter allen Wabenzellen von vorgelegtem Volumen bestimme man diejenige(n) mit kleinster Oberfläche. Es wird also die Dicke der Waben nicht vorgeschrieben. Die Lösung dieses Problems ist ebenfalls vorhanden, man kennt sie aber nicht. Hier tritt der merkwürdige Fall auf, daß die Lösung welche die Bienen gefunden haben, nicht optimal ist. Fejes Tôth hat eine Wabenzelle von folgendem Aussehen angegeben.

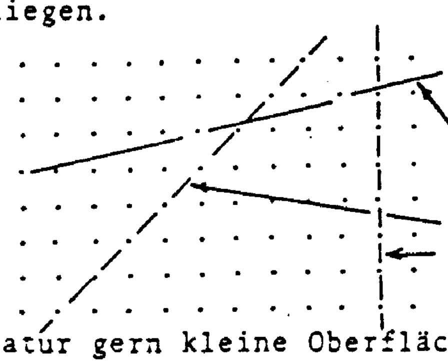


Die Fejes Tôthsche Zelle ist um etwas weniger als 0,35% besser (d.h. sie hat eine kleinere Oberfläche) als die echte Wabenzelle der Bienen. Ob damit die Bienen wirklich geschlagen sind sei dahingestellt. Man müßte ja noch die reale Wanddicke berücksichtigen und fragen, ob die Bienen ihrem Zellenbau nicht ein anderes Optimalitätskriterium zugrunde legen als die Minimierung der Oberfläche.

4. Warum sind Kristalle so regelmäßig?

Das Phänomen der Kristalle hat die Menschen wohl bewegt, seitdem man Kristalle betrachtet. Die Idee , daß den Kristallen Gitter zugrunde liegen könnten, tritt schon bei Johannes Kepler (1571-1630) und Christian Huyghens (1629-1695) auf. Nach Meinung von Ludwig August Seeber (1793-1855) bestehen Kristalle aus kleinen Parallelepipeden,in denen kugelförmige 'Atome' verteilt sind - eine beinahe moderne Auffassung. Zu Ende des 19.Jahrunderts begann man sich sehr erfolgreich mit der mathematischen Fundierung der Kristallographie zu beschäftigen, und zwar sowohl vom geometrischen als auch vom gruppentheoretischen Standpunkt.

Einem Kristall liegt ein Gitter aus Atomen und Molekülen zugrunde. Betrachten wir ein ebenes Flächenstück am Rande eines Kristalls so trägt es eine gewisse Oberflächenenergie pro Flächeneinheit. Sie ist ein Maß dafür, wieviel Energie man aufwenden muß, um ein Atom oder Molekül aus der Randfläche zu entfernen. Die Oberflächenenergie pro Flächeneinheit ist klein, falls in der Randebene viele Gitterpunkte liegen und groß, falls nur wenige Gitterpunkte in ihr liegen.



Da die Natur gern kleine Oberflächenenergienhat, so leuchtet ein, daß Kristalle Polyeder sind, die nur endlich viele (in der Praxis sogar recht wenige) Richtungen für die Randebenenstücke aufweisen.

Obwohl das Wachstum eines Kristalls von vielen Faktoren abhängt, scheint es so, als ob für kleine oder sehr regelmäßige Kristalle die Hauptkomponente bei der Bildung der Gestalt die Minimierung der Oberflächenenergie ist. Wir werden daher auf folgendes mathematische Problem geführt:

Die Oberflächenenergie pro Flächeneinheit auf einer ebenen Berandungsfläche eines Kristalls hänge nur von der Normalrichtung der Berandungsfläche ab. Wir ordnen also jedem Einheitsvektor n die Oberflächenenergie pro Flächeneinheit, $E(n)$, einer dazu normalen Randfläche zu. Ferner treffen wir folgende Annahme: Es gebe Einheitsvektoren $n_1,\dots,n_k$, also Punkte am Rande der Einheitssphäre, und eine Triangulation der Einheitssphäre, wobei die n_i's als Eckpunkte auftreten, sodaß für jeden Einheitsvektor n, der im Inneren eines sphärischen Dreiecks etwa mit den Eckpunkten n_1, n_2, n_3 liegt und somit in der Form

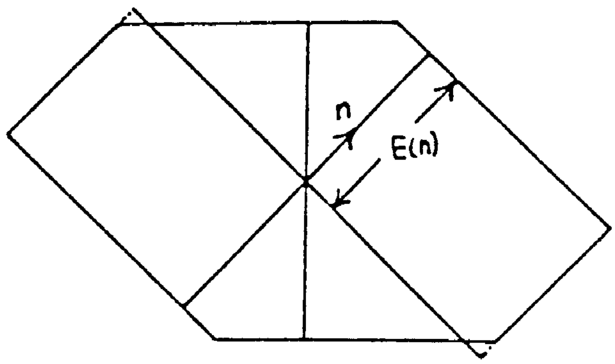
$$n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 \text{ mit } a_1, a_2, a_3 > 0$$

dargestellt werden kann, die Ungleichung

$$E(n) > a_1 E(n_1) + a_2 E(n_2) + a_3 E(n_3)$$

gilt. Analoge Ungleichungen gelten für die Punkte auf den Seiten der sphärischen Dreiecke.

Das Gesetz des Kristallographen Georg Wulff (1862-1925) sagt nun aus, daß es zu vorgelegtem Volumen ein eindeutig bestimmtes Polyeder gibt, für welches die Oberflächenenergie minimal ist. Neben dieser Existenzaussage gibt Wulff noch folgende Methode zur Konstruktion des gesuchten Polyeders an: Man trage für $i=1,\ldots,k$ auf dem vom Ursprung auslaufenden Halbstrahl in Richtung n_i vom Ursprung aus eine Strecke der Länge $E(n_i)$ auf. In den Endpunkten dieser Strecke konstruiere man Normalebenen zu den Halbstrahlen. Diese Normalebenen bestimmen ein konvexes Polyeder. Nun dehnt oder staucht man dieses Polyeder von Ursprung aus bis es das gewünschte Volumen hat. Das gibt den Kristall von vorgelegtem Volumen und minimaler Oberflächenenergie.



Es sei angemerkt, daß Wulff keinen vollständigen Beweis für sein Gesetz angab. Heinrich Liebmann (1874-1939) zeigte 1914: Wenn es einen Kristall gibt, der bei vorgelegtem Volumen minimale Oberflächenenergie besitzt, so muß er die von Wulff angegebenene Form besitzen. Die Existenzfrage bleibt also noch offen. Erst 1944 konnte der griechische, in Berlin wirkende Mathematiker Alexander Dinghas (1908-1974) das Problem zum Abschluß bringen, indem er zeigte, daß jede vom Wulffschen Polyeder abweichende Form eines Kristalls eine höhere Oberflächenenergie aufweist.

Es lassen sich also in gewissem Umfang Kristallformen durch ein Minimalprinzip "erklären".

5. Kugelpackungen

Unter den zahlreichen Problemkreisen der anschaulichen Geometrie nehmen Kugelpackungsfragen von jeher einen breiten Raum ein. Auch

Fragen der Biologie, der Codierung, der Metallurgie, der Baustoffkunde und der numerischen Integration führen auf Packungsprobleme für Kugeln. Ich werde mich im folgenden auf den dreidimensionalen Fall beschränken und die vielen neuen hochdimensionalen Resultate ausklammern.

Johannes Kepler hat in seiner kleinen Schrift über den Schnee aus dem Jahre 1611 die dichteste gitterförmige Kugelpackung in einer Skizze festgehalten. Dabei vesteht man unter einer Kugelpackung ein System von nicht übereinandergreifenden Kugeln von gleichem Radius. Die Dichte ist - grob gesprochen - der Anteil des Raumes, der von den Kugeln überdeckt wird. Gitterförmige Kugellagerungen sind solche von sehr regelmäßiger Art, d.h. solche, bei denen die Kugelmittelpunkte ein Gitter bilden.

Daß die von Kepler beschriebene Kugelpackung tatsächlich die dichteste gitterförmige ist, wurde nach Vorarbeiten des Kristallographen Ludwig August Seeber erst von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) nachgewiesen. Der Beweis ist typisch für Gauß: elegant und undurchsichtig. Gauß hat - wie ein Fuchs - sorgfältig die Fährte verwischt, auf der er den Beweis fand. Im Grunde ist es aber nicht schwierig, einen geometrischen Beweis zu führen.

Nachdem der Norweger Axel Thue (1863-1922) den ebenen Fall erledigte, erhob sich die Frage, ob die dichteste gitterförmige Kugelpackung die dichteste überhaupt ist oder nicht. (Die Existenz einer dichtesten Kugelpackung ist leicht sicherzustellen.) Wenn man sich das Problem etwas überlegt, dann wird man wohl zum Schluß kommen, daß die dichteste gitterförmige Kugelpackung wirklich die dichteste ist. Ich möchte diese Zuversicht etwas dämpfen: Betrachtet man eine Kugel aus einer dichtesten gitterförmigen Packung dann ist sie von einem System von 12 Kugeln umgeben. Es stellt sich aber überraschenderweise heraus, daß dieses System von 1+12 Kugeln eine konvexe Hülle von größerem Volumen hat, als ein System von 1+12 Kugeln wenn man die äußeren Kugeln den Eckpunkten eines Ikosaeders entsprechend anordnet. M.a.W. wir haben eine Anordnung gefunden, die dichter ist, als beim Kugelsystem aus der dichtesten gitterförmigen Kugelpackung. Claude Ambrose Rogers und später E.I.Baranovskii haben bewiesen, daß die Dichte der dichtesten Kugelpackung zwischen den Grenzen

$$0.740480 \ldots \text{ und } 0.779635 \ldots$$

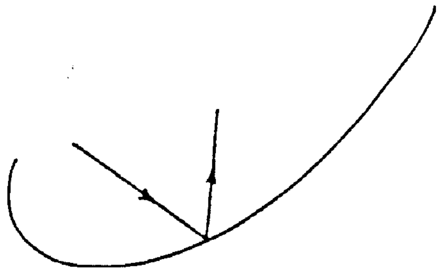
liegt. Die untere Grenze entspricht der dichtesten gitterförmigen

Kugelpackung. Die Beweisidee ist dabei die, daß man den Raum in Tetraeder zerlegt, deren Ecken gerade die Kugelmittelpunkte sind. Aristoteles (384-322) und später Roger Bacon (1219?-1292) haben behauptet, daß man den Raum in reguläre Tetraeder zerlegen kann. Träfe das zu, dann wäre die dichteste gitterförmige Kugelpackung schon die dichteste. Leider ist aber die Aussage des Aristoteles falsch. Nach Vorarbeiten von Lasló Fejes Tóth ist es kürzlich J.H.Lindsey gelungen, die obere Schranke für die Dichte der dichtesten Kugelpackung geringfügig auf 0.7784 herabzudrücken. In einer noch unveröffentlichten Arbeiten konnten Mary Dauenhauer und Hans Zassenhaus zeigen, daß gewisse lokale Veränderungen der dichtesten gitterförmigen Kugelpackung nicht zu dichteren Kugelpackungen führen. Dieses Resultat stellt einen Meilenstein bei der Lösung des Kugelpackungsproblems dar, selbst wenn es auf den ersten Blick sehr bescheiden aussieht.

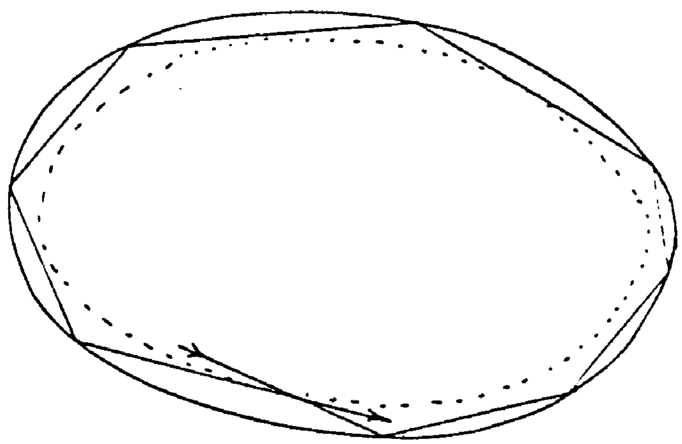
6. Billards

Eine Theorie, die in den letzten Jahren besondere Beachtung gefunden hat, ist die Theorie der dynamischen Systeme. Sie hängt mit Fragen der Bewegung etwa eines mechanischen Systems zusammen. Benachbarte mathematische Gebiete sind Differentialgleichungssysteme, speziell Fragen der Stabilität, Iterationsverfahren, Fixpunktfragen, spezielle Maße, Topologie u.a.

Paradebeispiele für dynamische Systeme sind Billards. Die Literatur über Billards ist sehr umfangreich. Ich möchte mich hier auf konvexe ebene Billards beschränken. Unter einem Billardtisch verstehen wir eine ebene konvexe Scheibe mit glattem Rand. Eine Billardkugel ist ein Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, solange bis er auf den Rand trifft. Dort wird er nach der Regel "Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel" reflektiert. Danach bewegt er sich wieder mit gleichförmiger Geschwindigkeit, usw. Die Kurve welche von einer Billardkugel beschrieben wird heißt Billardbahn oder -trajektorie.



Unter den zahlreichen Aussagen über Billards möchte ich ein eigenes Ergebnis anführen. Die Begriffe "typisch", "die meisten" und "ε-Kanal" seien dabei nicht näher definiert, sie vermitteln aber eine Idee. Das genügt für unseren Zweck. Für einen typischen Billardtisch haben die meisten Billardtrajektorien folgende Eigenschaft: Sind $\varepsilon > 0$ beliebig klein, z.B. $\varepsilon = 10^{-10}$, und n beliebig groß, z.B. $n = 10^{10}$ vorgegeben, dann durchläuft die Billardkugel in einem gewissen Zeitabschnitt den ε-Kanal n-mal in der einen Umlaufrichtung (ohne aus dem Kanal auszutreten), dann verläßt sie ihn, kommt später wieder in den Kanal und bewegt sich wieder n-mal durch den ε-Kanal, diesmal aber in der anderen Richtung.



7. Schlußbemerkung

Wenn es mir gelungen ist zu zeigen, wie lebendig Geometrie ist, habe ich mein Ziel erreicht. Urteilen darüber müssen aber Sie.

Abteilung für Analysis
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Wien